CONTENIDOS EBAU 2018

Ricardo Palancar. IES Norba Caesarina

ÍNDICE

CONTENIDOS DE MATEMÁTICAS II QUE SERVIRÁN DE BASE PARA ELABORAR LAS PROPUESTAS DE EXAMEN EN LA EBAU DEL CURSO 2017-2018

NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Definición de matriz. Operaciones con matrices. Conocimiento de sus propiedades. Propiedades y cálculo de determinantes (de orden ≤ 4). Matriz inversa. Ecuaciones matriciales.

Dependencia e independencia lineal de filas y columnas de matrices. Rango de una matriz: por filas, por columnas y a partir de los menores. Conocimiento de las transformaciones que no modifican el rango. Método de Gauss.

Dependencia e independencia lineal de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes. Regla de Cramer. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (incluso dependientes de un parámetro), con a lo sumo 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

GEOMETRÍA

Definición de vector, de suma de vectores y de producto por un escalar en el espacio real tridimensional. Conocimiento de sus propiedades. Definición de independencia y dependencia lineal de vectores.

Definición del producto escalar. Conocimiento de sus propiedades y cálculo en coordenadas rectangulares. Módulo de un vector. Ángulos entre vectores: ortogonalidad.

Definición del producto vectorial. Conocimiento de sus propiedades. Áreas de paralelogramos y triángulos. Definición del producto mixto. Volúmenes de paralelepípedos y tetraedros.

Ecuaciones paramétricas e implícitas de rectas y planos. Posiciones relativas de rectas y planos. Paralelismo. Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales.

Ángulos entre rectas y planos: perpendicularidad. Distancias entre puntos, rectas y planos.

ANÁLISIS

Concepto y ejemplos de límite de una función en un punto, incluyendo límites laterales, y límite cuando la variable tiende a ∞ o a $-\infty$. Conocimiento de las propiedades de los límites. Cálculo de límites. Indeterminaciones.

Definición y ejemplos de función continua. Continuidad de las funciones elementales y de las funciones definidas a trozos. Conocimiento de las propiedades de las funciones continuas (operaciones, conservación de signo, acotación).

Funciones continuas en un intervalo. Teorema de Bolzano: enunciado, ejemplos, interpretación geométrica y determinación en algunos casos, exacta o aproximada, del punto al que se refiere. Aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones. Teorema de los valores intermedios: enunciado, ejemplos, significado geométrico. Teorema de Weierstrass: enunciado, ejemplos, significado geométrico.

Derivada de una función en un punto: definición e interpretación geométrica. Definición de función derivable. Relación entre la continuidad y la derivabilidad. Ejemplos de funciones continuas no derivables. Derivadas de orden superior (2ª y 3ª).

Derivadas de las funciones elementales. Derivadas de sumas, productos, cocientes y funciones compuestas (regla de la cadena).

Cálculo de la tangente a una curva dada de forma explícita.

Definición de función creciente y decreciente en un punto. Definición de extremo relativo de una función en un punto. Relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función. Anulación de la derivada en los extremos relativos.

Curvatura de una función: concavidad y convexidad. Definición de punto de inflexión de una función.

Teorema de Rolle: enunciado, interpretación geométrica, determinación en algunos casos de un punto al que se refiere. Aplicación al estudio de la unicidad de soluciones de ecuaciones.

Teorema del valor medio de Lagrange: enunciado e interpretación geométrica.

Enunciado y aplicación de la Regla de l'Hôpital para resolver las indeterminaciones: $0/0$, ∞/∞ , $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$.

Aplicación de límites y derivadas a la representación de funciones, incluyendo asíntotas. Estudio de las propiedades locales de las funciones: extremos locales, crecimiento, curvatura y puntos de inflexión. Problemas de optimización: máximos y mínimos.

Definición de primitiva de una función y de integral indefinida. Propiedades del cálculo de primitivas. Reglas de cálculo de integrales inmediatas. Explicación y aplicación de los métodos de integración por partes y por sustitución o cambios de variable (dados o no).

Integración de funciones racionales en las que el denominador sea a lo sumo de grado 3 y tenga raíces reales simples fácilmente calculables.

Concepto de integral definida, interpretación geométrica y ejemplos. Propiedades de la integral definida: enunciado e interpretación gráfica.

Teorema del valor medio del cálculo integral: enunciado, interpretación geométrica y determinación en algunos casos el punto al que se refiere.

Regla de Barrow: enunciado, aplicación al cálculo de áreas de recintos planos limitados por curvas, representándolos previamente de forma esquemática.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.

Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso. Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica.

Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.

Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.

Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN EBAU 2018

ESTRUCTURA DE LA PRUEBA - PUNTUACIÓN

La prueba constará de dos opciones, y el alumno podrá elegir libremente una de ellas.

Cada opción contendrá **CUATRO** ejercicios y tendrá la siguiente estructura: **UN** ejercicio será del bloque **"Números y Álgebra"** y se valorará hasta un máximo de **2,5 puntos**; **UN** ejercicio será del bloque **"Geometría"** y se valorará hasta un máximo de **2,5 puntos**; **UN** ejercicio será del bloque **"Análisis"** y se valorará hasta un máximo de **3,5 puntos**; **UN** ejercicio será del bloque **"Estadística y Probabilidad"** y se valorará hasta un máximo de **1,5 puntos**.

Cuando un ejercicio de un bloque contenga más de un apartado, la puntuación se especifica individualmente en cada uno de los apartados.

En el caso en que un alumno mezcle respuestas a ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida por ese alumno la opción que aparezca en primer lugar en dichas respuestas.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Son criterios esenciales de valoración de un ejercicio el planteamiento razonado y la resolución correcta del mismo.
- Una presentación clara y ordenada y el uso correcto de la notación serán valoradas positivamente.
- No se descartará ningún método que conduzca a la resolución de un ejercicio, si bien no todos deben valorarse por igual.
- Los errores de cálculo tendrán mayor o menor importancia según se deban a deficiencias conceptuales o a fallos mecánicos.
- Se valorará positivamente la coherencia, de modo que si un alumno arrastra un error sin entrar en contradicciones, este error no se tendrá en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten ser de una complejidad equivalente.
- En los ejercicios de naturaleza práctica se concederá especial importancia al planteamiento correcto del problema, cuyo peso en el total de la nota nunca será inferior al 30%.
- Las respuestas correctas, pero sin justificación, cuando explícita o implícitamente se exija una justificación razonada, se calificarán a lo sumo con el 40% de la puntuación máxima que corresponda.

CONDICIONES SOBRE LAS CALCULADORAS ADMITIDAS EN LOS EXÁMENES EBAU

Se permite el uso de calculadoras en las pruebas de Matemáticas II, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Las calculadoras que se usen **no podrán tener** ninguna de las siguientes prestaciones:

- Trasmisión de datos
- Almacenamiento de datos alfanuméricos
- Representación grafica de funciones
- Resolución de ecuaciones
- Operaciones con matrices, cálculo de determinantes
- Cálculo de derivadas e integrales
- Programación (*)
- Cálculo simbólico (*)

(*) Un modelo **no** se considera *programable* o *con calculo simbólico* solo por la posibilidad de hacer pequeñas asignaciones de resultados a variables (función que aparece asociada a la tecla ALPHA en muchos modelos).

En caso de duda sobre la posibilidad de poder usar una determinada calculadora en el desarrollo de una prueba, se consultará con el tribunal quien adoptará la última decisión. Los tribunales no facilitarán calculadoras alternativas

A modo de orientación se muestra un listado de las calculadoras permitidas:

Auchan CS-08 PLUS BAUCHAN CS-12 PLUS Canon F-720i Casio: fx-82 ES, fx-82 ES PLUS, fx-82 LB Fraction, fx- 82 MS, fx-82 SX PLUS , fx-825X fraction, fx-82 SP Iberia, fx-82 SPX Iberia, fx-85MS ES WA, fx-220 PLUS , fx-300 MS, fx-350 ES, fx-350 ES Plus, fx-350 MS, fx-350MS ES TLG TL, fx-350 SP X Iberia , fx-550 Casio fx-590, fx-2600. Citizen: SR-135 y SR-260 Sci. Calculator Citizen SR-270x Elco: EC-545 y ECF-4807	GENIE 701 SC HP: 10s, 10s+ Scientific Calculator 300s+, SmartCalc 300s Sci. Kenko: KK-82MS-5 (S.U.P.E.R.), kk-88MS-1 Lexibook Sc 100 Milan M-240 PLUSoffice FX-224 Sharp: EL-521VH y EL-531VH TI 30

Y **no** permitidas

Canon F-788dx, F-788SG y F-789SGA Casio ClassPad 330 Casio: fx-95, fx-100, fx-115, fx-570, fx-991, fx-3650P, fx- 3950P, fx-5800P, fx-6000G, fx-9750GII, fx-9860GII, CG 20, CP400. Casio Grap: 25, 75, 95, 100. Citizen SRP-265	HP 35g, 50g, 39gII, 39gs. HP Prime Graphing Calculator SHARP: EL-506W, EL-520W, EL- 546W, EL-9950. TI: -30X Pro, 84 Plus C, 89, nspire CX

TEORÍA EBAU 2018

ÁLGEBRA. BLOQUE 1

Definición de matriz

Una matriz numérica es una tabla de números que están ordenados según dos índices de variación que llamaremos respectivamente filas y columnas.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Simbólicamente, $A = (a_{ij})_{i=1...n;\ j=1...m}$;i: nº de fila; j: nº de columna.

Operaciones con matrices

Suma

Sean $A = (a_{ij})_{n,\ m}$ y $B = (b_{ij})_{n,\ m}$ dos matrices del mismo orden o dimensión llamaremos suma de ambas: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n,\ m}$. Es decir, la matriz que resulta de sumar término a término ambas matrices. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Producto por escalares

Sea $k \in R$ y A la matriz ya definida anteriormente. Definiremos $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$. Es decir, multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el escalar correspondiente. Por ejemplo,

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Producto de dos matrices

Es el resultado de multiplicar, ordenadamente, todos los vectores fila de la 1ª matriz por todos los vectores columna de la segunda.

En forma simbólica, $A \cdot B = (c_{ik}) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)$

Para poder multiplicar dos matrices $A_{mx\mathbf{n}} \cdot B_{\mathbf{n}xp}$ el número de columnas de la 1ª ha de ser igual al número de filas de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$4 \text{ x } 3 \quad \cdot \quad 3 \text{ x } 2 \quad =$$

Propiedades de la suma

Asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Conmutativa	$A + B = B + A$
Elemento neutro	$0_{m,n}$
Elemento opuesto	$-A = (-a_{ij})$

Propiedades del producto por escalares

Asociativa	$r\cdot(s\cdot A)=(r\cdot s).A$
Distributiva 1	$(r+s)\cdot A=r\cdot A+s\cdot A$
Distributiva 2	$r\cdot(A+B)=r\cdot A+r\cdot B$
Elemento neutro	$1\cdot A=A$

Propiedades del producto de matrices (suponiendo órdenes compatibles)

Asociativo: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Pseudoasociativo: $A \cdot (r \cdot B) = r \cdot A \cdot B$

No es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Distributiva: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ y por la derecha también.

Determinante de orden n

Llamamos determinante de una matriz A y representamos por $\det A = |A|$:

- La suma de todos los productos posibles que se pueden formar.
- Tomando un elemento de cada fila y columna sin que se repitan las filas y columnas.
- Afectado de un signo + ó – según sea par o impar el número de inversiones que presenta el orden de las columnas respecto de las filas en ese producto.

$$|A| = \sum_{\sigma \in \wp(n)} (-1)^{sig(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Propiedades

Una función vectorial se dice lineal si

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \text{ y } f(r \cdot \vec{a}) = r \cdot f(\vec{a})$$

El determinante es lineal por filas o columnas. Es decir, multilineal.

1. $|A| = |A^t|$
2. Un determinante con una línea (fila o columna) de ceros es cero.
$$\det\left[\overrightarrow{A_1}; \overrightarrow{A_2}; \ldots; \overrightarrow{A_i} + k \cdot \overrightarrow{A_j}; \ldots \overrightarrow{A_n}\right] = \det\left[\overrightarrow{A_1}; \overrightarrow{A_2}; \ldots; \overrightarrow{A_i}; \ldots; \ldots \overrightarrow{A_n}\right].$$
3. Si cambiamos dos líneas paralelas entre sí el determinante cambia de signo.
$$\det\left[\overrightarrow{A_1}; \overrightarrow{A_2}; \ldots; \overrightarrow{A_j}; \ldots; \overrightarrow{A_i}; \ldots; \overrightarrow{A_n}\right] = -\det\left[\overrightarrow{A_1}; \overrightarrow{A_2}; \ldots; \overrightarrow{A_i}; \ldots; \overrightarrow{A_j}; \ldots; \overrightarrow{A_n}\right]$$

4. Un determinante con dos líneas iguales paralelas es nulo.

$$\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_i};...;\overrightarrow{A_i};...;\overrightarrow{A_n}\right]=0$$

5. Si multiplicamos una línea de un determinante; es decir, un vector fila o columna, por un escalar, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;k\cdot\overrightarrow{A_i};...;\overrightarrow{A_n}\right]=k\cdot\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_i};...;\overrightarrow{A_n}\right]$$

6. Si en un determinante hay dos filas (o dos columnas) proporcionales, su determinante es cero.

$$\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_i};...;k\cdot\overrightarrow{A_i};...\overrightarrow{A_n}\right]=0$$

7. Un determinante se puede descomponer en suma de dos, descomponiendo una de sus columnas o filas en suma de dos.

$$\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_i}+\overrightarrow{A_j};...\overrightarrow{A_n}\right]=\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_i};...;...\overrightarrow{A_n}\right]+\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_j};...\overrightarrow{A_n}\right]$$

8. Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras (paralelas) el determinante no varía.

$$\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_i}+k\cdot\overrightarrow{A_j};...\overrightarrow{A_n}\right]=\det\left[\overrightarrow{A_1};\overrightarrow{A_2};...;\overrightarrow{A_i};...;...\overrightarrow{A_n}\right]$$

9. Si tiene una línea que es c.l. de las demás paralelas su determinante es cero y viceversa.
10. La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela es 0.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0$$

11. Para un producto de matrices cuadradas: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

De esta propiedad 11 se deduce que $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

12. El determinante de una matriz triangular o diagonal coincide con el producto de todos los elementos de la diagonal.

Matriz inversa

Se define como matriz inversa de A –cuadrada– a la matriz que representamos por A^{-1} y que cumple lo siguiente

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\mathbf{I}$$

Es decir, que el producto por ella me da la identidad. Este producto resulta siempre conmutativo.

El determinante tiene que ser diferente de cero.

Se demuestra que la matriz inversa de A coincide con el siguiente valor:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A)^t$$

Rango de una matriz: por filas, por columnas y a partir de los menores

Rango de una matriz A es el mayor nº de vectores l.i. que contiene. Se demuestra que es igual por filas que por columnas.

Coincide con el orden mayor de menores diferentes de cero que contenga.

Método de Gauss

Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Operaciones elementales

Es decir, operaciones que me dan sistemas equivalentes.

1. Cambiar de orden dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por un escalar $\neq 0$.
3. Sumar una ecuación a otra.
4. A una ecuación se le suma (propiedad 3) el producto de un escalar por otra (prop. 2)

Método de Gauss

Es el método que consiste en pasar de un sistema de ecuaciones a otro escalonado y equivalente mediante operaciones elementales. Al elemento del sistema que utilizo para hacer ceros se llama 'pivote'.

La solución se construye a partir de la última ecuación que sufre reducción.

Regla de Cramer

Sea un sistema de ecuaciones lineales con $|A| \neq 0$. Esto ya implica dos cosas, que A es cuadrada y con determinante $\neq 0$.

Se cumple que:

$x_i = \dfrac{|A_{x_i}|}{|A|}$ donde A_{x_i} es la matriz que resulta de sustituir la columna de x_i por B

Es decir, sustituimos la columna i de la matriz de los coeficientes por el término independiente.

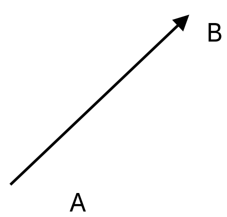
Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{matrix} m\ ecuaciones - \ filas - \\ n\ incógnitas - cols - \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} rgA \neq rgA'. \ \ INCOMPATIBLE \\ \\ rgA = rgA' = r. \ \ COMPATIBLE \left\{ \begin{array}{ll} r = n & DETERMINADO \\ & Solución\ única \\ r < n & INDETERMINADO \\ & n - r \ \ parámetros\ libres \end{array} \right. \end{array} \right.$$

GEOMETRÍA. BLOQUE 2

Vector

Es un segmento orientado del espacio. Viene determinado por dos puntos que se dan en un orden. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$



Origen A, extremo B

Módulo, distancia de A a B: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

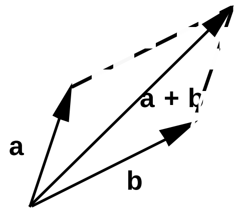
Dirección la de la recta sobre la que está y todas las paralelas a ella.

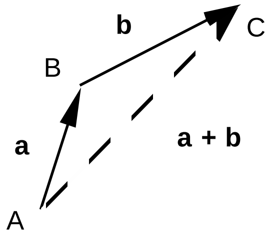
Sentidos. Caben dos posibles ordenaciones.

Suma de vectores

Ley del paralelogramo

El vector suma de dos vectores que situamos con origen común coincide con la diagonal principal del paralelogramo que determinan.



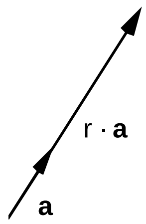


Producto por escalares

Sea r ∈ R un número y **a** un vector del espacio. Definimos como producto escalar de r · **a**

El vector resultante r · **a** tiene

- La misma dirección.
- Sentido:
  - opuesto si r<0
  - Igual si r>0
- Modulo: ||r · **a**|| = |r| · ||**a**||



Propiedades

Suma:

Asociativa: $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$

Elemento neutro: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

Elemento opuesto: $\vec{v}+\overrightarrow{-v}=\vec{0}$

Conmutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Producto por escalares

- Asociativa: $r\cdot\left(s\cdot\vec{a}\right)=\left(r\cdot s\right)\cdot\vec{a}$
- Distributiva 1: $\left(r+s\right)\cdot\vec{a}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{a}$
- Distributiva 2: $r\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b}$
- Neutro: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Definición de independencia y dependencia lineal de vectores

Un vector **b** se dice que es combinación lineal de **a** si:

b = r · **a**

Esta relación es recíproca salvo con el vector nulo **0** (0, 0, 0)

Linealmente dependientes

Dos vectores **a** y **b** se dicen linealmente dependientes si tienen la misma dirección. Es decir, si uno es combinación lineal del otro. Pueden tener distinto módulo y sentido.

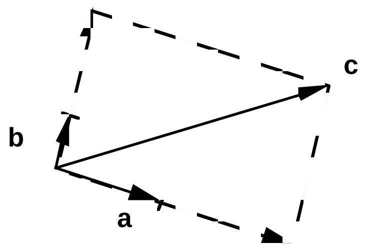
Dos vectores se dicen linealmente independientes si ocurre lo contrario.

Un vector **c** se dice que es combinación lineal de **a** y **b** si

$$\mathbf{c} = r \cdot \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{b}$$

• En el dibujo el vector **c** es combinación lineal de **a** y **b**.

En concreto, **c** = 2 **a** + 3 **b**



Tres vectores se dicen l.d. si alguno depende del resto. En caso contrario se dicen l.i.

Producto escalar de vectores

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \\ 0 \text{ si } \vec{a} = \vec{0} \text{ o } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

Propiedades

1. Módulo de un vector:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$$

2. Conmutativa:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

3. Distributiva:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

4. Perpendicularidad:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$$

5. Asociativa por escalares:

$$(r \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = r \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (r \cdot \mathbf{b})$$

Producto escalar en coordenadas (base ortonormal)

Si referimos los vectores a una base ortonormal (perpendiculares y de módulo 1) y aplicando las propiedades anteriores obtenemos la expresión del producto escalar en coordenadas.

Sean **a** (a_1, a_2, a_3) y **b** (b_1, b_2, b_3) referidos a una base ortonormal **i**, **j**, **k**.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Aplicaciones

Módulo de un vector: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

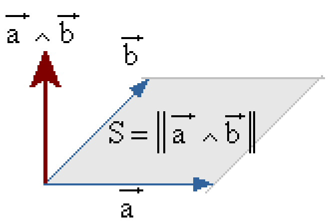
Ángulo de dos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Producto vectorial de vectores

Sean **a** y **b** dos vectores, se llama producto vectorial de ambos vectores y se representa por $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ o bien $\vec{a} \wedge \vec{b}$ al vector que cumple lo siguiente:

1. Es perpendicular al plano determinado por **a** y **b**.



2. Tiene de módulo el área del paralelogramo que determinan **a** y **b**:
   $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot \operatorname{sen}\alpha$ (0º≤α<180º)

3. E igual orientación que el sistema de referencia −regla del sacacorchos−

Propiedades del producto vectorial

Se pueden demostrar fácilmente, sin más que seguir la definición las siguientes:

$$\begin{cases} 1)\ \vec{v}x\vec{u} = -\vec{u}x\vec{v} \\ 2)\ \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0};\ \text{si } \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ son paralelos. En particular: } \vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0} \\ 3)\ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k};\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j};\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \\ 4)\ (\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w} \\ 5)\ (r\vec{u})\times\vec{v} = r\left(\vec{u}\times\vec{v}\right) = \vec{u}\times\left(r\vec{v}\right) \\ 6)\ \textit{No es asociativo}: (\vec{e}_1\wedge\vec{e}_1)\wedge\vec{e}_2 = \vec{0} \neq \vec{e}_1\wedge(\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \end{cases}$$

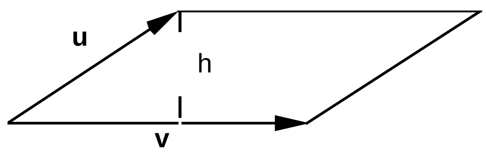
Producto vectorial en coordenadas

Aplicando las propiedades anteriores se obtendría para una base ortonormal:

$$\vec{u}\,x\,\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2 \,, u_3v_1 - u_1v_3 \,, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Área de un paralelogramo y un triángulo

Consideremos un paralelogramo cualquiera.



El área de un paralelogramo es A = base x altura.

A = |**v**|· h = |**v**|· |**u**| · sen(**u**,**v**) = | **u** x **v** |

El área del triángulo será pues A = $\dfrac{\left|\vec{u}x\vec{v}\right|}{2}$

Producto mixto de tres vectores

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \vec{u}\cdot\left(\vec{v}\ x\ \vec{w}\right) = u_1\cdot\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\cdot\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\cdot\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Sus propiedades se deducen del determinante

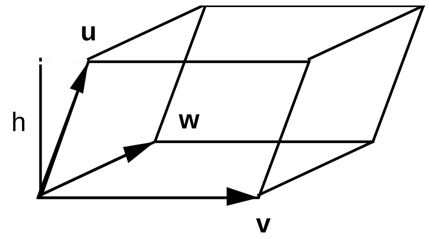
$a)\ [\vec{v},\vec{u},\vec{w}\ ] = -[\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ ]\ldots$

$b)\ [\ \vec{u}+\vec{u'},\vec{v},\vec{w}\ ] = \det(\vec{u}+\vec{u'},\vec{v},\vec{w}) = +[\ \vec{u'},\vec{v},\vec{w}\ ]$

$c)\ [\ r\cdot\vec{u},\vec{v},\vec{w}\ ] = \det(r\cdot\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = r\cdot[\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ ]$

Volumen del paralelepípedo

Prisma que tiene de bases dos paralelogramos iguales:



Volumen = Base · Altura.

El área de la base es la de un paralelogramo. Y la altura es la proyección de **u** sobre **v** x **w**.

$$B = |\ \vec{v}\ x\ \vec{w}\ |;\ Altura = pr\ \vec{u}\ |\ \vec{v}\ x\ \vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot(\vec{v}\ x\ \vec{w})}{|\ \vec{v}\ x\ \vec{w}\ |}$$

Echando cuentas resulta:

$$V = |\ \vec{v}\ x\ \vec{w}\ |\cdot\frac{\vec{u}\cdot(\vec{v}\ x\ \vec{w})}{|\ \vec{v}\ x\ \vec{w}\ |} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\ x\ \vec{w}) = [\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ ]$$

Volumen del tetraedro

$$V = \frac{1}{6}|\ \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\ | = \frac{1}{6}\cdot|\ \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\ |$$

Ecuaciones de la recta

Una recta en el espacio se puede identificar con un punto y una dirección. Es decir, mediante un punto A y un vector **v**.

$$r : A,\vec{v}$$
$$r = \left\{P\ /\ \overrightarrow{AP} = t\cdot\vec{v}\right\} = \left\{P\ /\ \vec{p} = \vec{a} + t\cdot\vec{v}\right\}$$

La recta es el conjunto de puntos que están alineados con A según la dirección de **v**.

Si esto lo expresamos en coordenadas tendríamos que:

P(x, y, z)

A(a_1, a_2, a_3) y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

Ecuación vectorial

(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t (v_1, v_2, v_3)

Ecuaciones paramétricas

(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t (v_1, v_2, v_3)

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1 \cdot t \\ y = a_2 + v_2 \cdot t \\ z = a_3 + v_3 \cdot t \end{cases}$$

Ecuaciones continuas

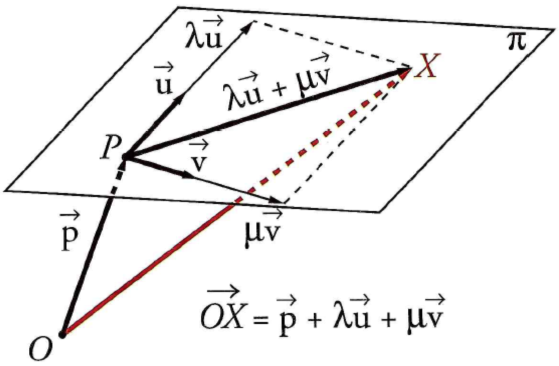
Despejando t en las paramétricas e igualando obtenemos:

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1 \cdot t & \rightarrow & t = \dfrac{x - a_1}{v_1} \\ y = a_2 + v_2 \cdot t & \rightarrow & t = \dfrac{y - a_2}{v_2} \\ z = a_3 + v_3 \cdot t & \rightarrow & t = \dfrac{z - a_3}{v_3} \end{cases}$$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Ecuaciones del plano

Un plano es el objeto geométrico que viene definido por un punto y dos direcciones l.i.



$$\pi = \left\{P \,/\, \overrightarrow{AP} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \,/\, r,\ s \in R\right\} = \left\{P \,/\, \vec{p} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \,/\, r,\ s \in R\right\}$$

De esta expresión obtenemos nuestras primeras ecuaciones:

Ecuación vectorial

(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + r (u_1, u_2, u_3) + s (v_1, v_2, v_3)

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a_1 + u_1 \cdot r + v_1 \cdot s \\ y = a_2 + u_2 \cdot r + v_2 \cdot s \\ z = a_3 + u_3 \cdot r + v_3 \cdot s \end{cases}$$

Ecuación general o implícita del plano

De la definición del plano, $\pi = \{P \in R^3 \,/\, \overrightarrow{AP} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \,/\, r, s \in R\}$, es claro que $\overrightarrow{AP}$ es c.l. de **u** y **v**.

Es decir, que este determinante será nulo y viceversa, todos los puntos que pertenezcan al plano harán al determinante nulo:

$$\left|(\overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v})\right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Del desarrollo de este determinante obtenemos una ecuación de grado uno que es la ecuación general.

Ax + By + Cz + D = 0

Forma implícita de la ecuación de la recta

Sabemos que una ecuación lineal en el espacio representa un plano.

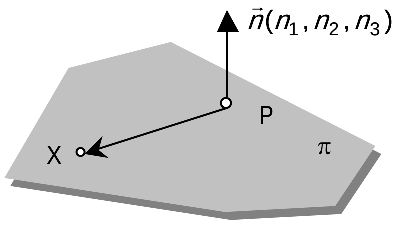
Pues una recta vendrá dada como la intersección de dos planos. Es decir,

$$r:\begin{cases} \pi: Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi': A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \rightarrow \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}}_{M}\!\!\begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix}}^{M'} \quad con\ rgM = rgM' = 2$$

Ecuación implícita de un plano a partir de un vector normal

Un punto perteneciente a un plano. y un vector perpendicular al plano son elementos suficientes para determinar dicho plano

Sea $P(p_1, p_2, p_3)$ un punto del plano y **n**(n_1, n_2, n_3) vector perpendicular a dicho plano.



Un punto genérico del plano π: X(x, y, z), se caracterizará porque $\overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{n}$. Lo que equivalente a que: **PX** · **n** = 0.

Esto traducido en componentes significa que:

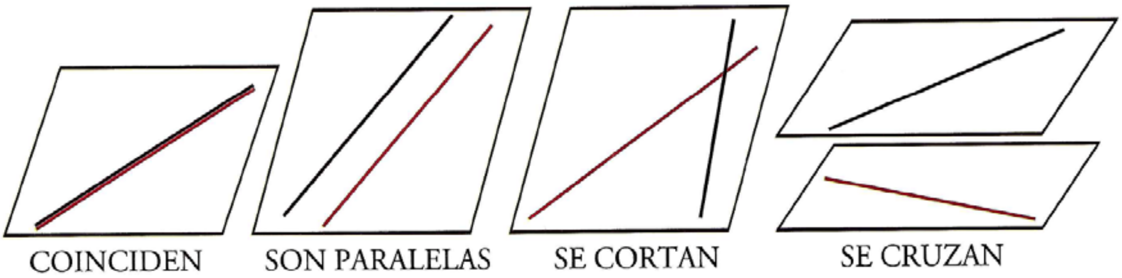
$(x-p_1, y-p_2, z-p_3). (n_1, n_2, n_3) = 0$

Realizando las operaciones oportunas, resulta que:

$$n_1x + n_2y + n_3z + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

Posiciones relativas de dos rectas

Las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio son:



Colineales	**Coincidentes** Son idénticas
Coplanarias	**Paralelas** Tienen la misma dirección y no coincidentes
Coplanarias	**Secantes** Se cortan en un punto.
No coplanarias	**Se cruzan** Direcciones distintas y no son co-planarias.

Caracterización vectorial

Misma dirección

Si un punto de una pertenece a la otra son coincidentes.
Si un punto de una NO pertenece a la otra son paralelas.

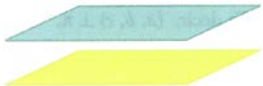
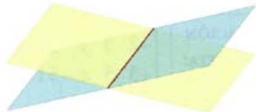
Distinta dirección

Si tienen un punto común son secantes.
Si no tienen ningún punto en común se cruzan.

$$\begin{array}{l} r: A,\vec{u} \\ r': B,\vec{v} \end{array} \left\{ \begin{array}{c|c} rg(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})=1 & r=r' \\ \hline \begin{array}{c} rg(\vec{u},\vec{v})=1 \\ rg(\overrightarrow{AB},\vec{u})=2 \end{array} & r // r' \\ \hline \begin{array}{c} rg(\vec{u},\vec{v})=2 \\ rg(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})=2 \end{array} & r \cap r' = P \\ \hline \begin{array}{c} rg(\vec{u},\vec{v})=2 \\ rg(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})=3 \end{array} & cruzan \end{array} \right.$$

Posición relativa de dos planos

Dos planos en el espacio pueden ocupar 3 posiciones relativas:

Coincidentes	 $ran\,(M) = ran\,(M') = 1$
Paralelos	 $ran\,(M) = 1,\ ran\,(M') = 2$
Incidentes	 $ran\,(M) = ran\,(M') = 2$

Estudio analítico

Veamos cómo determinar la posición relativa de los planos a partir de sus ecuaciones generales.

$$\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \rightarrow \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}}_{M}\!\!\begin{matrix} D \\ D' \end{matrix}}^{M'}$$

No es difícil establecer e interpretar los resultados posibles:

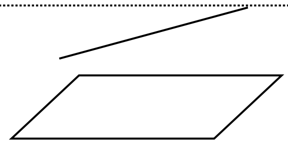
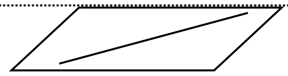
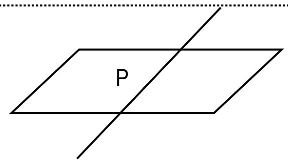
rgM	rgM'	N° *incóg*	*Sistema*	*Solución*	*Posición*
1	1	3	*C.I.*	*Plano*	$\pi = \pi'$
1	2	3	*I.*	–	$\pi \cap \pi' = \varnothing$
2	2	3	*C.I.*	Re*cta*	$\pi \cap \pi' = r$

Aún es posible obtener algo más:

rgM	rgM'	*Ecuaciones*	*Coeficientes*	*Solución*
1	1	(A', B', C', D') *es c.l. de* (A, B, C, D)	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	$\pi = \pi'$
1	2	(A', B', C') *es c.l. de* (A, B, C)	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	$\pi \,//\, \pi'$
2	2	(A', B', C') *es l.i. con* (A, B, C)	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ ó $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$	$\pi \cap \pi' = r$

Posiciones relativas de recta y plano

Las posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio son las siguientes:

Recta paralela al plano	
Recta contenida en el plano	
Recta secante con el plano	

Caracterización vectorial

Si la recta es paralela o contenida en el plano: $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$; siendo el vector director de la recta y el vector normal del plano respectivamente. En caso contrario sería secante. Discriminar los primeros es fácil a través de un punto.

Este es el mejor método y más rápido.

Por los vectores directores

El estudio que sigue se puede deducir fácilmente y dejar como ejercicio.

$$\begin{array}{l} r: A,\vec{u} \\ \pi: B,\vec{v},\vec{w}\; con\; rg(\vec{v},\vec{w})=2 \end{array}\left\{\begin{array}{l|c} \begin{array}{l} rg(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=2 \\ rg(\overrightarrow{AB},\vec{v},\vec{w})=2 \end{array} & r\subset\pi \\ \hline \begin{array}{l} rg(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=2 \\ rg(\overrightarrow{AB},\vec{v},\vec{w})=3 \end{array} & r//\pi \\ \hline rg(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=3 & r\cap\pi=P \end{array}\right.$$

Ecuaciones generales

Del estudio anterior vemos que una recta puede definirse por la intersección de dos planos.

$$r:\begin{cases}\pi: Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi': A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}\rightarrow \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}}_{M}}^{M'} \quad con\; rgM=rgM'=2$$

Veamos como deducir sus posiciones relativas a partir de sus ecuaciones.

Tendremos las siguientes posibilidades:

$$\begin{array}{l} r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}; \\ \pi: A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{array} \quad \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}}_{M}}^{M'}$$

rgM	rgM'	*Incóg*	*Sist*	*Soluc*	*Posición*
2	2	3	$C.I.$	Re*cta*	$r \subset \pi$
2	3	3	I	$\varnothing$	$r \,//\, \pi$
3	3	3	$C.D.$	P	$r \cap \pi = P$

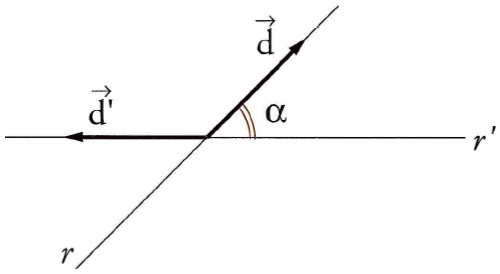
Es claro que el punto de corte, en el caso de incidencia, se halla resolviendo el sistema de ecuaciones que forman.

Ángulo entre dos rectas

Sea r(P, **u**) y s(Q, **v**) dos rectas del espacio.

Se llama ángulo formado por ambas al menor de los ángulos que determinan sus respectivas direcciones.

No hace falta, pues, que se corten puesto que es una cuestión vectorial.

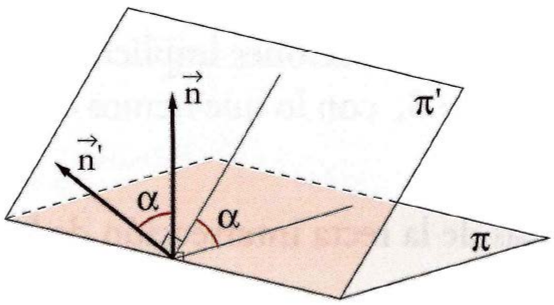


En definitiva, lo que resulta es que el ángulo buscado tiene por coseno el siguiente valor:

$$\cos(r, r') = |\cos(\vec{v}, \vec{v}')| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{v}'|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|}$$

Ángulo formado por dos planos

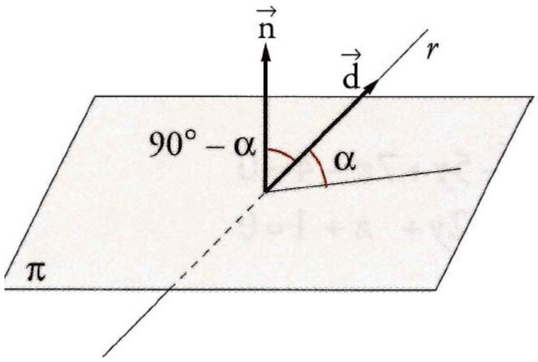
Es el que forman los vectores normales a ellos, coincide con su ángulo diedro. Es decir, el ángulo mínimo que forman dos semirrectas: una de cada plano. Viene definido por el corte del plano que forman las dos normales.



Luego,

$$\cos(\pi, \pi') = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$

Ángulo formado por recta y plano



Llamaremos ángulo formado por una recta y un plano al que forman la recta y la proyección ortogonal de la recta sobre el plano. Que es el ángulo mínimo. Viene definido por el corte del plano que forman la normal y la dirección de la recta.

Según hemos analizado ya otras veces esto equivale a decir, que en cualquier caso la relación que existe es la siguiente:

$$sen(\pi, r) = \left| \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = sen\alpha$$

Distancia entre dos puntos

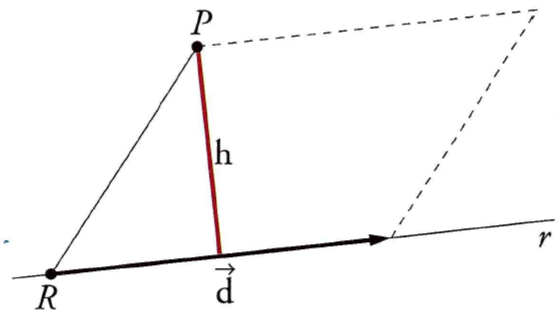
La distancia entre dos puntos viene dada por $d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$

Sean $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$. Lógicamente tendremos que:

$$d(P, Q) = \left| \mathbf{PQ} \right| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Distancia entre punto y recta

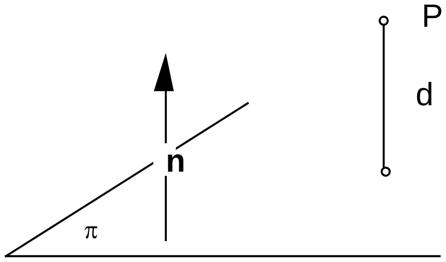
De nuevo el camino más corto medirá la distancia, que viene dado por la perpendicular a r que pasa por Q. Para ello nos fijamos en el siguiente dibujo:



$$dist(P, r) = \text{h} = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{\text{d}}|}{|\vec{\text{d}}|}$$

$$d = \left| \overrightarrow{RP} \right| \cdot sen(\vec{d}, \overrightarrow{RP}) = \left| \overrightarrow{RP} \right| . \frac{\left| \vec{d} \; x \; \overrightarrow{RP} \right|}{\left| \vec{d} \right| \left| \overrightarrow{RP} \right|} = \frac{\left| \vec{d} \; x \; \overrightarrow{RP} \right|}{\left| \vec{d} \right|}$$

Distancia de un punto a un plano



Dados el punto P y el plano π:

π: Ax + By + Cz + D = 0

P(p_1, p_2, p_3)

La distancia de un punto a una recta viene dada por la perpendicular.

$$pr \; \overrightarrow{AP} \,\big|\, _{\vec{n}} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(P, \pi) = \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Distancia recta-plano

Tendría que ser paralela. Por tanto, de un punto de la recta al plano. Si se cortan o está contenida la distancia sería 0.

Distancia plano-plano

Tendrían que ser paralelos. Por tanto, la distancia de un punto de uno de ellos al otro plano.

Si se cortan o son coincidentes la distancias sería 0.

Distancia entre rectas

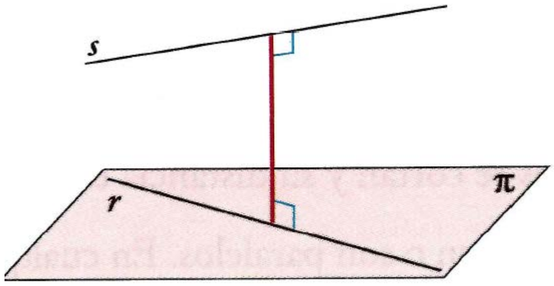
Si son secantes o coincidentes la distancia es 0.

Paralelas

Si son paralelas basta hallar la distancia de un punto de una de ellas a la otra.

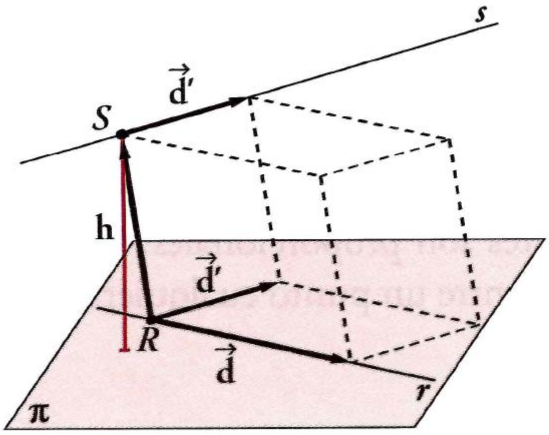
Se cruzan

Hallar el plano que contiene a una y es paralelo a la otra. Después la distancia de un punto de la segunda al plano anterior.



La altura del mismo es la distancia que hay entre las dos caras del paralelepípedo. Esta es la distancia entre las rectas. Luego si dividimos el volumen entre el área de la base resolvemos el problema:

$$d(r,s)=\frac{\left|[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]\right|}{\left|\vec{u}x\vec{v}\right|}$$



ANÁLISIS. BLOQUE 3

Tendencia de una variable

Decimos que una variable tiende a un valor si se aproxima indefinidamente a él. En principio hablamos de procesos que nos imaginamos mentalmente.

La tendencia puede ser a un valor finito o infinito.

x→a

x→2: 2'01; 2'001; 2'0001; 2'00001;...

x→–4: ...

x→∞: 2, 4, 6, 8, 10,...

Las formas de tender o acercarse a algo no son únicas.

Límites laterales

A todo valor me puedo acercar por valores superiores o inferiores y esto se representa de esta manera:

$$x \to a^+;\ x \to a^-$$

Tendencia de una función

Decimos que una función tiende a l cuando x tiende a a.

Es decir, si la variable *y* se acerca indefinidamente a *l* al acercarse indefinidamente *x* a *a*.

Puede ser finito, infinito o no existir.

$$f(x) \to l \text{ cuando } x \to a$$

Dicho más abreviadamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Se lee el límite de la función f(x) es l cuando la x tiende a *a*.

Es decir, la función (la y) tiende al valor l cuando la variable x tiende al valor a.

Operaciones con límites

El límite opera bien con las operaciones elementales y con las funciones elementales.

Es decir, el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones, etc.

Función continua en un punto

Una función y = f(x) se dice que es continua en un punto "a" si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esto significa tres cosas:

1. $a \in D$
2. Existen los límites laterales y coinciden.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Operaciones con funciones continuas

Las funciones elementales son continuas en sus respectivos dominios de definición.

Si operamos funciones continuas en x = a obtenemos los siguientes resultados:

1. f + g es continua en x = a. Ej: $y = senx + x^2$.
2. f - g es continua en x = a
3. f · g es continua en x = a. Ej: $y = e^x \cdot \cos x$
4. r · f es continua en x = a siendo $r \in R$
5. $\frac{f}{g}$ es continua en x = a siempre que $g(a) \neq 0$. Ej: $y = \frac{senx}{e^x}$
6. g o f es continua en x = a siempre que g sea continua en f(a).

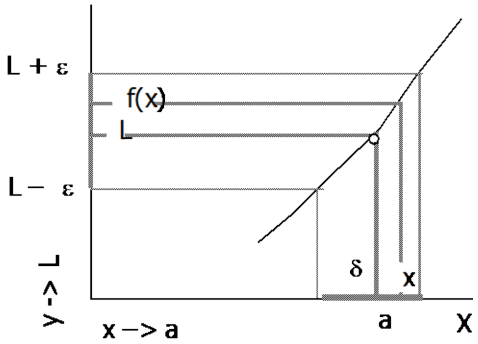
Ej: $y = sen\left(x^2 + 2x + 1\right)$

7. Como y = | x | es continua $\forall$ x $\in$ R por la propiedad 6
   y = | f(x) | es continua $\forall$ x $\in$ R si f(x) es continua.

Ej: $y = \left|x^2 - 5x + 4\right|$. Se puede dibujar y considerar cómo no pierde la continuidad.

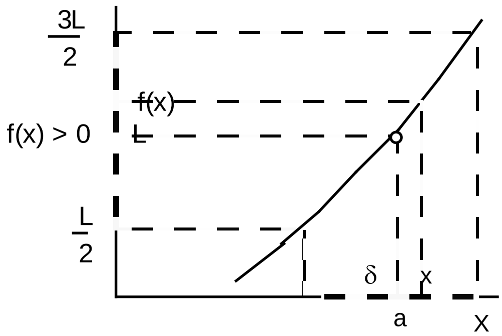
Función continua en un punto está acotada en un entorno reducido del punto

Una función convergente en un punto a está acotada en un entorno reducido de a: E^* (a,δ)



Función continua en un punto tiene signo constante en un entorno reducido del punto

Una función con límite positivo en x = a se mantiene positiva en un entorno reducido de a



Continuidad en un intervalo

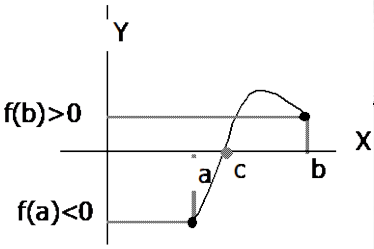
Una función se dice continua en un intervalo si es continua en cada punto del intervalo. En los extremos (si fuese cerrado) basta que el límite lateral exista por uno de los lados.

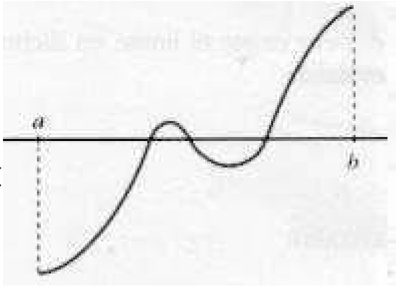
Teorema de Bolzano

Una función continua en un intervalo cerrado que tiene distinto signo en sus extremos se anula en algún punto del intervalo.

> f continua en [a, b] y f(a) < 0 < f(b)
> ENTONCES
> $\exists$ c $\in$ (a, b) / f(c) = 0

Es decir, que si en a es negativa y en b positiva en algún valor intermedio c se anula. La generalización para otros valores es muy sencilla.





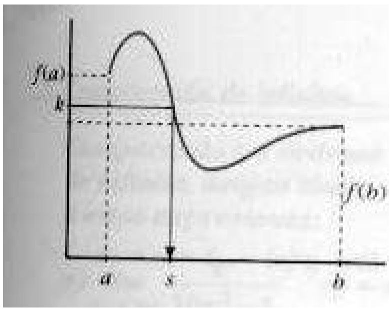
Teorema de los valores intermedios (Darboux)

Es una generalización del teorema de Rolle.

Una función continua en [a, b] toma todos los valores intermedios entre f(a) y f(b).

$\forall k \,/\, k$ está entre f(a) y f(b) $\exists s \in (a,b) \,/\, f(s) = k$

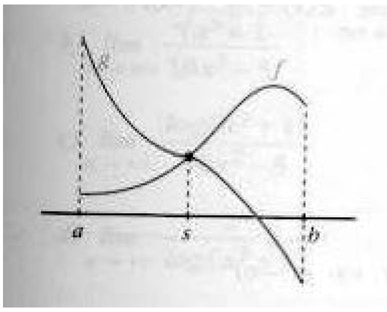
La demostración se basaría en considerar la función g(x)=f(x)−k



Aplicación al corte de dos funciones

Si f y g son continuas en [a, b] y f(a)<g(a) y f(b)>g(b); o al revés, entonces existe s∈(a, b) tal que f(s)=g(s)

Para la demostración basta considerar la función h(x)=f(x)−g(x)

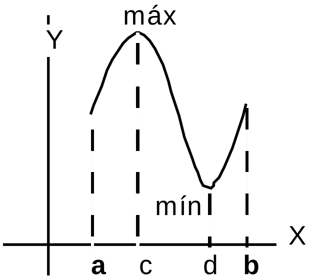


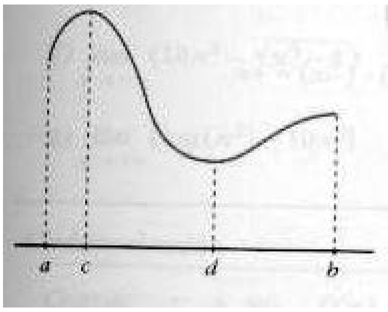
Teorema de Weierstrass

f continua en [a, b]

ENTONCES

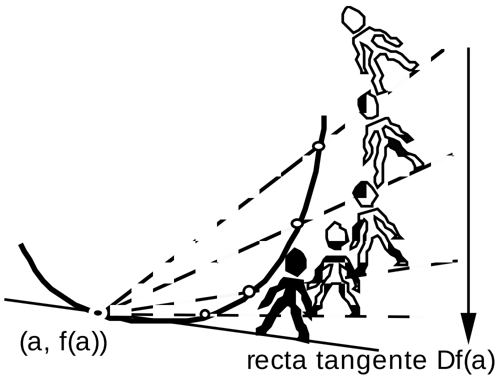
f alcanza un máximo y un mínimo absoluto en el intervalo. (Puede ser en los extremos del intervalo)





Derivada de una función en un punto

$$f'(a) = Df(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Es muy importante darse cuenta de que la recta tangente es un límite. Todas las cuerdas están perfectamente definidas porque tenemos dos puntos de ellas. De la recta tangente sólo tenemos un punto y su pendiente, que viene dada por el límite de las pendientes de las cuerdas.

Derivadas laterales

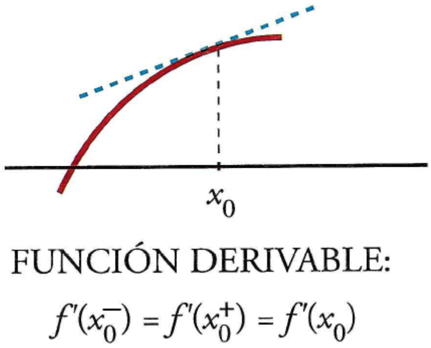
$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

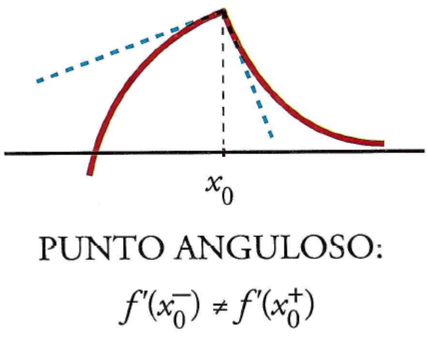
$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si las derivadas laterales coinciden tendremos la derivada en el punto y la función es derivable en dicho punto. La función es “suave” en dicho punto.

Si las derivadas laterales no coinciden tendremos una función no derivable en dicho punto. Presentará un punto anguloso.

Si no existiese alguna derivada lateral, tampoco existiría la derivada de la función en dicho punto.





Derivable ⇒ continua

Está claro que una función puede ser continua y no derivable. Por ejemplo, la función valor absoluto.

Lo que no puede ocurrir es lo contrario. Es decir, si una función es derivable en un punto (tiene tangente), entonces es continua en dicho punto.

Por ejemplo, $y = \sqrt[3]{x}$ en x = 0 es continua pero no derivable en dicho punto.

La demostración es elemental

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h = f'(a)\cdot 0 = 0$$

Es decir,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Derivable en un intervalo

Una función se dice derivable en un intervalo abierto (a, b) si lo es en todos sus puntos.

Es derivable en un cerrado [a, b] si lo es en el abierto y en los extremos respectivamente por la dcha. y por la izda.

Nuestro objetivo ahora es calcular la función derivada de otra función; es decir, la derivada no en un punto sino la fórmula para cualquier punto.

Dominio de derivabilidad

Llamaremos D' al conjunto de x ∈ R tales que y = f(x) tiene derivada en ellos. Es decir, existe

$$f'(x) = Df(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivadas sucesivas

Se llama así a la derivación reiterada de una función que da lugar a la derivada segunda, tercera,...

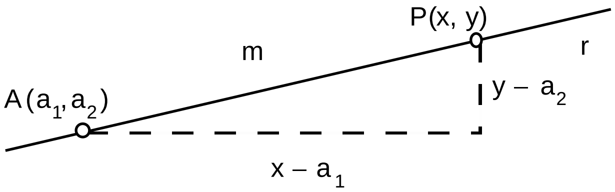
Derivadas de las funciones elementales. Derivadas de sumas, productos, cocientes y funciones compuestas (regla de la cadena).

Ecuación punto-pendiente de una recta

Una recta se caracteriza por tener una pendiente constante que llamamos **m**.

Con un punto A(a_1, a_2) y una pendiente *m* podemos también identificar una recta en el plano.

Los puntos de la recta serán tales que el vector $\overrightarrow{AP}$ tenga de pendiente m

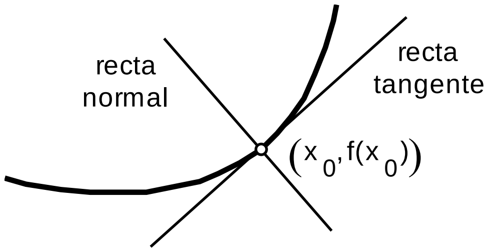


Ecuación punto-pendiente:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m; \qquad y=y_0+m\cdot(x-x_0)$$

Tangente a una función en un punto

Se llama recta tangente a una función en un punto a la recta que pasa por ese punto y tiene la misma pendiente que la función.



Entre una y otra recta sólo cambia la pendiente: $m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{f'(x_0)}$

Recta tangente:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0); \qquad y=y_0+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Recta normal:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{f'(x_0)}; \qquad y=y_0+\frac{-1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$

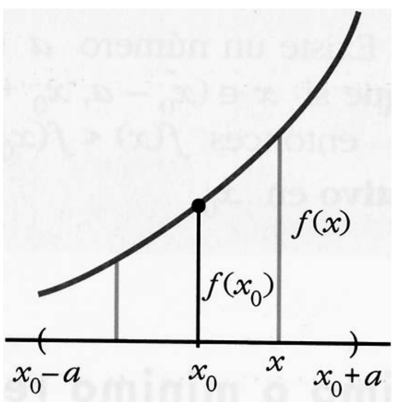
Crecimiento y decrecimiento local

y = f(x) se dice creciente en un punto a si ∃ E(a, r) = (a−r, a+r) en el que es creciente (estrictamente) la función.

$\exists E(a,r)\,/\; f(x)$ *es creciente* estrictamente

o lo que es igual

$$\exists E(a,r)\,/\left\{\begin{array}{l} x<a\Rightarrow f(x)<f(a) \\ a<x\Rightarrow f(a)<f(x)\end{array}\right| \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$



Análogamente y = f(x) se dice decreciente en un punto si ∃ E(a, h) en el que es decreciente la función:

$$\exists E(a,r) \,/\, f(x) \; es\ decreciente$$
$$o\ lo\ que\ es\ igual$$
$$\exists E(a,r) \,/ \left\{ \begin{array}{l} x < a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ a < x \Rightarrow f(a) > f(x) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} < 0 \right.$$

Propiamente lo anterior es estricto. Se admite la igualdad para la monotonía "a secas". Ver Rey Pastor. El teorema de derivada positiva o negativa me daría monotonía estricta.

Derivada positiva implica creciente

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f crece en $x = x_0$

Dem

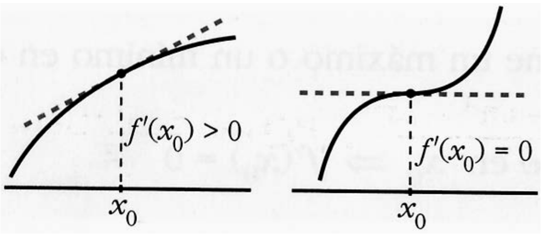
Por teoría de límites:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) > 0 \; luego \, \exists E(x_0) \,/\, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$$

Esto nos da el crecimiento local de la función en $x = x_0$
Análogo para decreciente.

Contraejemplo

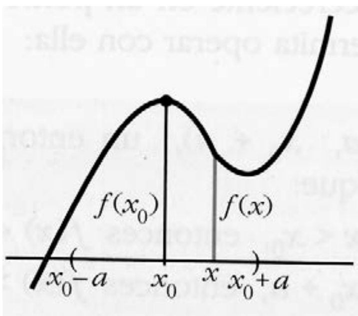
Sin embargo, una función puede ser creciente en un punto y su derivada no ser positiva.
Es el caso de $y = x^3$ en $x = 0$



Máximo relativo

Se dice que y = f(x) alcanza en x_0 un máximo relativo si existe un $E(x_0, r)$ tal que:

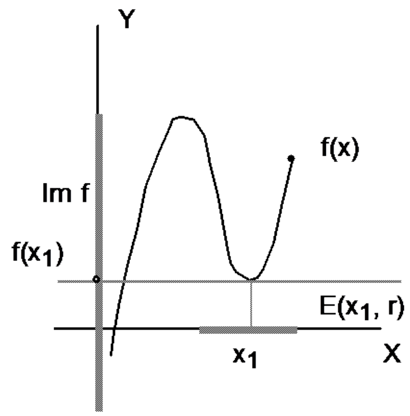
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in E(x_0, r)$$



Mínimo relativo

Se dice que y = f(x) alcanza en x_1 un mínimo relativo si existe un $E(x_1, r)$ tal que:

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in E(x_1, r)$$



Caracterización de máximos y mínimos

versión 1

Si f(x) es continua en un E(a, h)
f(x) creciente en los puntos de un entorno a la izquierda de "a"
f(x) decreciente en los puntos de un entorno a la derecha de "a"

En "a" hay un máximo

versión 2

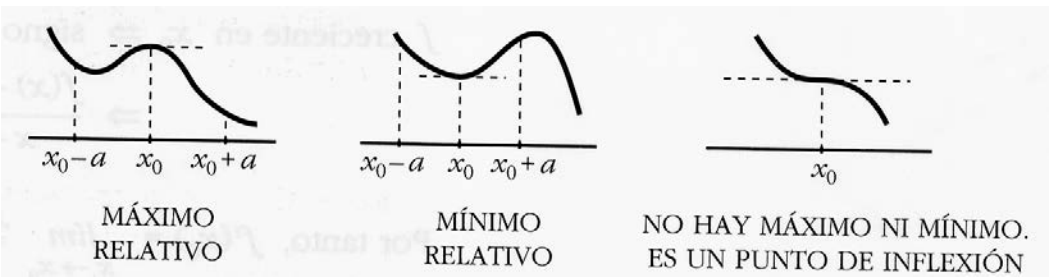
Si f(x) es continua en un E(a, h)
f ' (x) > 0 en los puntos de un entorno a la izquierda de "a"
f ' (x) < 0 en los puntos de un entorno a la derecha de "a"

En "a" hay un máximo

Máximos y mínimos relativos. Caracterización por la primera derivada.

Si una función tiene un extremo relativo en "c" y es derivable en "c".	ENTONCES	f ' (c) = 0

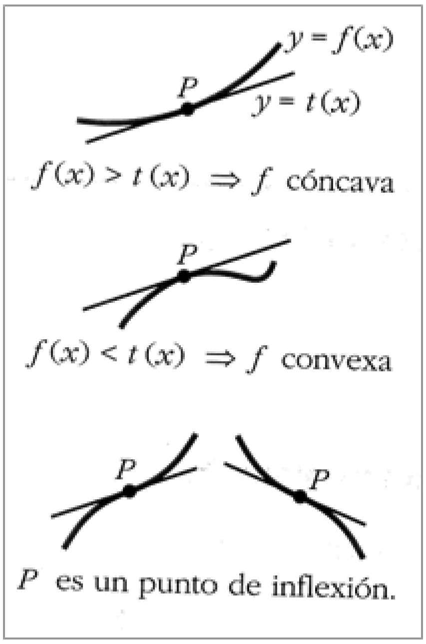
No al revés. Por ejemplo, $y=x^3$ en x=0. No tiene extremo.
Esto nos da una pista de donde buscar los máximos y mínimos.



Concavidad y convexidad local

$$y = f(x): \begin{cases} \textit{cóncava en a si } \exists E^*(a,h) \textit{ tal que } t(x) < f(x) \\ \textit{convexa en a} \text{ si } \exists E^*(a,h) \text{ tal que } t(x) > f(x) \end{cases}$$

donde t(x) es la recta tangente en a
Es decir, $t(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$



Inflexión

Hablaremos de punto de inflexión en el caso de que la recta tangente a la izquierda esté por arriba y a la derecha por debajo o al revés.

Segunda derivada y curvatura

f''(a) > 0 entonces f es cóncava en "a".
Análogo para convexa.

No recíproco

Por ejemplo $y=x^4$. Es cóncava en x=0 y su segunda deriva es nula.

Proposición (caso particular de inflexión sin ver derivada segunda)

f'(0) = 0 y no hay cambio de signo a los lados en la derivada $\Rightarrow$ hay inflexión.

Inflexiones y segunda derivada

Si f es derivable en "a" (por lo menos tiene que tener recta tangente para poder hablar de inflexión según la definición dada)

$$\begin{array}{ll} f''(x) > 0 & \left.\begin{array}{r} x < a \\ a < x \end{array}\right\} \rightarrow \text{"}a\text{" } \textit{inflexión} \\ f''(x) < 0 & \end{array}$$

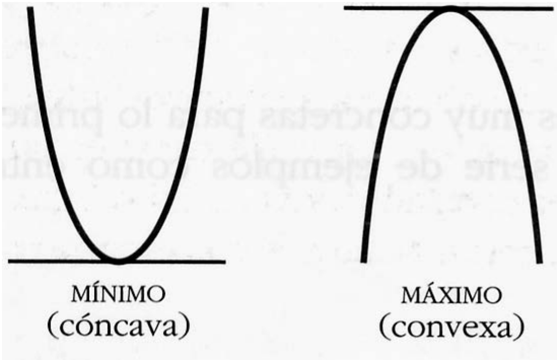
Máximos y mínimos relativos: caracterización por la 2ª derivada

$f'(a) = 0 \ y \ f''(a) > 0 \Rightarrow x = a$ *hay un mínimo relativo.*

Análogo para máximo relativo.

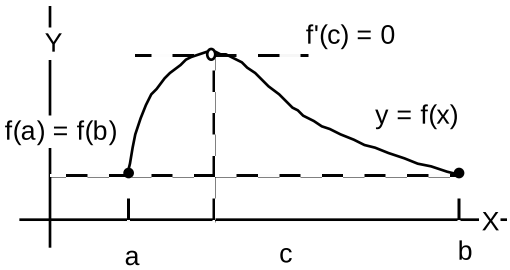
No recíproca

Por ejemplo, $y=-x^4$.



Teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; continua \;\; en \;\; [a,\; b] \\ f \;\; derivable \;\; en \;\; (a,\; b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \rightarrow \exists c \in (a,\; b) \; / \; f\,'(c) = 0$$

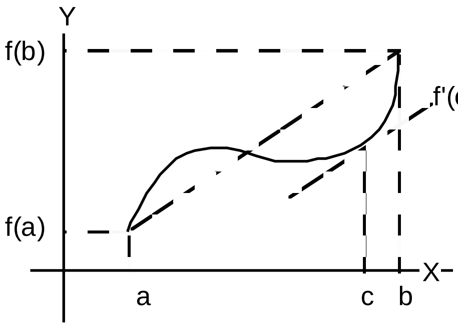


Aplicación a la unicidad de soluciones de una ecuación

Si una función es continua y derivable y tiene ‘n’ raíces, la derivada tendrá ‘n–1’. Luego me pueden servir las raíces de la derivada para saber dónde hay raíces de la función primitiva. Es decir, tendrá a izda. y dcha. de ella.

Teorema del valor medio de Lagrange: enunciado e interpretación geométrica.

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; continua \;\; en \;\; [a,\; b] \\ \\ f \;\; derivable \;\; en \;\; (a,\; b) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \exists \;\; c \;\; \in \;\; (a,\; b) \\ con \\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array}$$



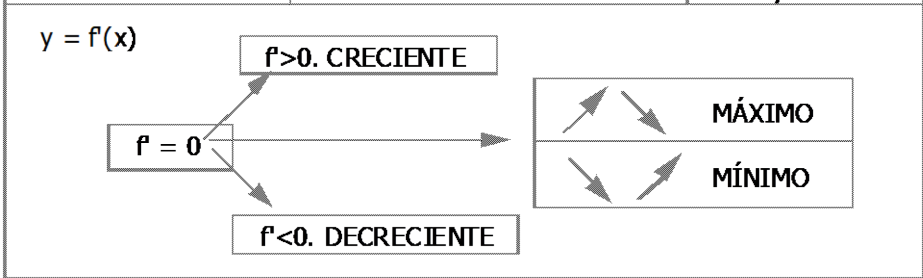
Regla de l'Hôpital

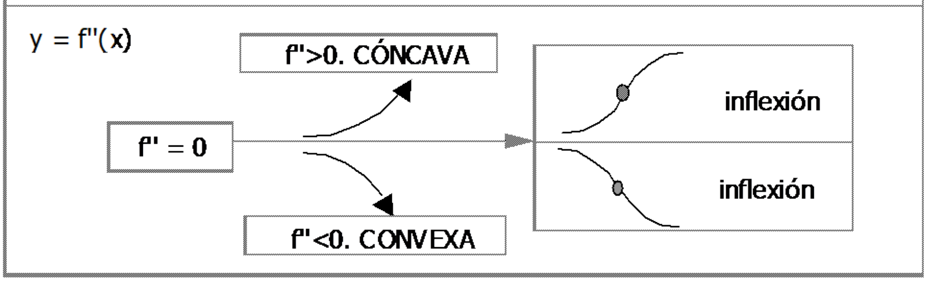
$$\left.\begin{array}{l} f, g \text{ derivables en E(a,r)} \\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(0)}{(0)} \\ \exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = l \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = l$$

Se puede extender a otras indeterminaciones.

Aplicación de límites y derivadas a la representación de funciones

Dominio y discontinuidades. Cortes ejes	Simetrías. Periodicidad	
y = f(x)	En discontinuidades. ASÍNTOTAS VERTICALES	x –> a y –> ∞
	ASÍNTOTAS HORIZONTALES	x –> ∞ y –> k
	En x ± ∞	
	ASÍNTOTAS OBLICUAS	x –> ∞ y –> mx+n
	Ramas parabólica	x –> ∞ y –> ∞





Optimización de funciones

Cálculo de los extremos de una función en un intervalo [A, B]

Una función definida en un intervalo cerrado sólo tiene estas posibilidades:

1. Tener los máximos o mínimos absolutos en los extremos del intervalo. Que sólo habría que evaluar dos valores f(a) y f(b). Por ejemplo una función creciente.

2. Alcanzarlos en algún punto interior. En este caso también serían relativos como es lógico. Luego si fuese derivable bastaría buscarlos entre los que hagan f'(x)=0.

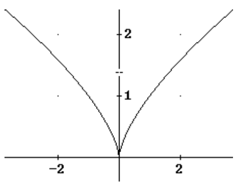
Práctica

1. Si f(x) es derivable en [a, b]

– Se resuelve la ecuación f'(x) = 0. De aquí nos saldrán x_1, x_2, ...

– Se calculan f(a), f(x_1), f(x_2),...,f(b). Puntos en los que no sea derivable o continua.

2. Si en algún punto la función es continua y no derivable también podría ser un extremo. Por ejemplo esto pasa para la función $y=\sqrt[3]{x^2}$. Tiene derivada lateral infinita en el origen y alcanza en dicho punto su valor mínimo y = 0.



3. Si f no es continua en algún punto x_0 de [a, b], estudiaremos el comportamiento de la función en las cercanías de x_0. Por ejemplo, una función a trozos.

Primitivas

Toda operación matemática tiene su inversa. La derivación también.

La primitiva de una función es la operación inversa de la derivada.

Así pues, diremos que y = F(x) es primitiva de y = f(x) si

$$F'(x) = f(x)$$

• $F(x) = x^2$ es primitiva de y = 2x porque $D[x^2] = 2x$.

Se representa así:

$$\int f(x) \text{ —primitiva o integral de f(x)—}$$

$$x^2 \underset{\int 2x}{\overset{D[x^2]}{\rightleftarrows}} 2x$$

Dicho de otra manera más sencilla

$$\int 2x = x^2$$

derivada

La primitiva está definida salvo una constante ya que la derivada de una constante es cero. Es decir,

$$\int 2x = x^2 + k$$

Propiedades

1) $\int f(x) + g(x) = \int f(x) + \int g(x)$

2) $\int k\, f(x) = k \int f(x)$

3) $\int f(mx+n) = \dfrac{1}{m} F(mx+n) \text{ ya que } \left[\dfrac{1}{m} F(mx+n)\right]' = \dfrac{1}{m} \cdot F'(mx+n) = \ldots$

4) $\int f(g(x)).g'(x) = F(g(x)) \text{ ya que} \ldots$

Primitivas inmediatas

De la tabla de derivadas elementales obtenemos la lista de primitivas inmediatas:

Función	***Primitiva***	**General**
		Después de regla de la cadena
f(x) = 0	F(x) = k	
$f(x) = x^a$	$F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + k$	$\int f(x)^a \cdot f'(x) = \frac{f(x)^{a+1}}{a+1} + k$
f(x) = cosx	F(x) = senx + k	$\int \cos f(x) \cdot f'(x) = senf(x) + k$
f(x) = senx	F(x) = – cosx + k	$\int senf(x) \cdot f'(x) = \cos f(x) + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	F(x) = ln|x| + k	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\int e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)} + k$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^{f(x)} f'(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	F(x) = tgx + k	$\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) = \int \left(1 + tg^2 f(x)\right) \cdot f'(x) = tgf(x) + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	F(x) = arcsenx + k	$\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x) = arcsenf(x) + k$
$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	F(x) = arccosx + k	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x) = \arccos f(x) + k$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	F(x) = arctgx + k	$\int \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x) = arctgf(x) + k$

Diferencial de una función en un punto

Se llama así al incremento de la variable y que viene dado por la recta tangente en dicho punto.

$$df_a(h) = f'(a) \cdot h \text{ (h es el incremento de la x)}$$

y = f(x) ; dy = f'(a) · dx. En x = a

dy = f'(x) dx en general.

Poner algún ejemplo. $y=x^2$ en x=1. Hacer un dibujo.

Nueva expresión para la derivada:

$$dy = f'(x)dx$$

$$df(x) = f'(x)dx$$

Para un punto general.

De la igualdad puesta antes resulta que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Que es una de las expresiones de la derivada. La derivada es la proporción entre las diferenciales.

Para $y = x^2$ en $x = 3$. Tendríamos que $dy = f'(3) \cdot dx = 6dx$

Nos indica la tendencia que tiene dicha función en ese punto con respecto a x.

Primitivas en forma diferencial

Si $y = F(x)$ es primitiva de $y = f(x)$ entonces $F'(x)=f(x)$, luego $dF=F'(x)dx=f(x)dx$:

$$\int f(x)\,dx = F(x);\ \text{ya que } dF = f(x)\,dx$$

Integración por partes

Los métodos de integración como es lógico se deducirán de las reglas o métodos de derivación.

Empezamos por la derivada del producto:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Luego,

$$\int (u \cdot v)' = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$$

En resumen:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

Con diferenciales sería:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Y la conclusión sería análoga:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$$

Este método se aplica casi siempre que tengamos en la integral un producto de funciones con alguna de ellas trascendente (relacionadas con el número π o e)

Integración por cambio de variable o sustitución

Este segundo método se fundamenta en la derivada de la composición de funciones o regla de la cadena.

Supongamos que tenemos una expresión bicuadrada:

$f(x)= x^4 + 2x^2 + 8$ y hacemos el cambio $y=x^2$. Tendremos $f(y)= y^2 + 2y + 8$.

A este procedimiento se le llama hacer un cambio de variable.

Veamos como con este procedimiento se puede simplificar el cálculo de algunas primitivas:

$$\int \frac{-3x^3}{1+x^4}dx = \int \frac{-3}{y}\cdot\frac{dy}{4} = -\frac{3}{4}\int\frac{1}{y}dy = -\frac{3}{4}\ln y = -\frac{3}{4}\ln\left(1+x^4\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+x^4 = y \\ 4x^3dx = dy \\ x^3dx = \dfrac{dy}{4} \end{array}\right\} \text{ cambio de variable}$$

Se utiliza este método siempre que tengamos en la integral una función multiplicada por su derivada. El cambio en cuestión es llamar y a la función en cuestión. También se utiliza para eliminar radicales.

En realidad, se basa en lo siguiente:

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)dx = \int g(y)dy = G(y)+k = G(f(x))+k$$

donde y=f(x); dy=f´(x)dx

Primitivas o integrales de funciones racionales

El cálculo de la primitiva de una función racional se puede reducir a tres casos:

Primero:

$\int \frac{1}{x^n}dx = \int x^{-n}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}+k = \frac{1}{(-n+1)\cdot x^{n-1}}+k$	$\int \frac{1}{x^3}dx = \frac{-1}{2x^2}+k$

Segundo:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert$	$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx = \ln\lvert x^2-4x+13\rvert + k$

Tercero:

$\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx + k$	

Descomposición de una fracción algebraica

A la hora de integrar una función racional lo primero de todo será efectuar la división de los polinomios si el grado del denominador no fuese superior al del denominador:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

De tal forma que la primitiva siempre se reducirá al caso en que el grado del numerador es inferior al del denominador.

Raíces simples

Si el denominador presenta varias raíces en su descomposición y son simples, el procedimiento es muy parecido. Veamos un caso:

$$\frac{3x+5}{(x-4)\ (x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5}$$

Así pues, en la descomposición, aparecen tantos sumandos del tipo anterior como raíces simples haya.

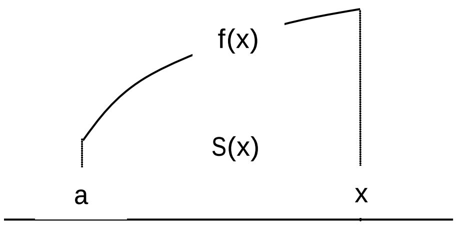
Concepto de integral definida, interpretación geométrica y ejemplos. Propiedades de la integral definida: enunciado e interpretación gráfica.

Concepto de integral definida

Todos los resultados de este tema los planteamos para funciones continuas o continuas a trozos.

La integración propiamente se ocupa del cálculo de superficies mediante los métodos del análisis; es decir, de las funciones y de los límites.

Esto se puede reducir al cálculo del área entre la gráfica de una función y el eje X.



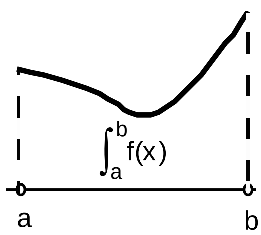
Sea y = f(x) una función continua o continua a trozos. Llamemos S(x) a la función que me da la superficie desde "a" hasta "x" y lo representaremos así:

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

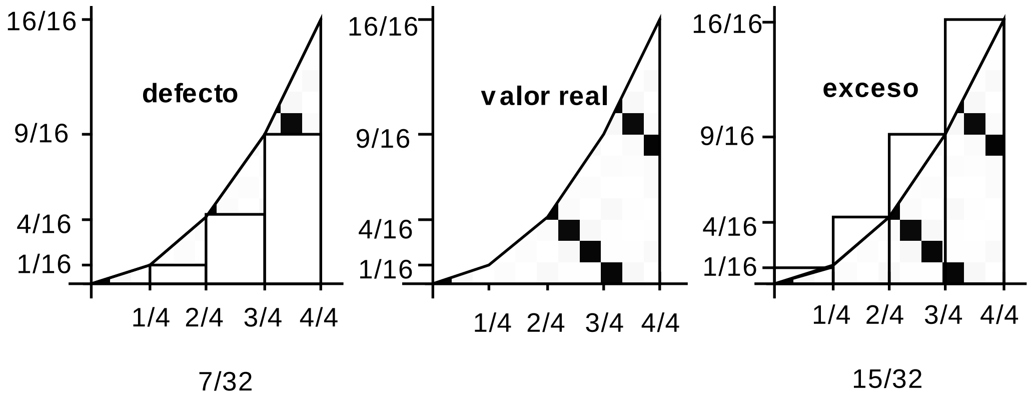
Se llama así porque se hace una “integración” de elementos diferenciales.

Función integrable

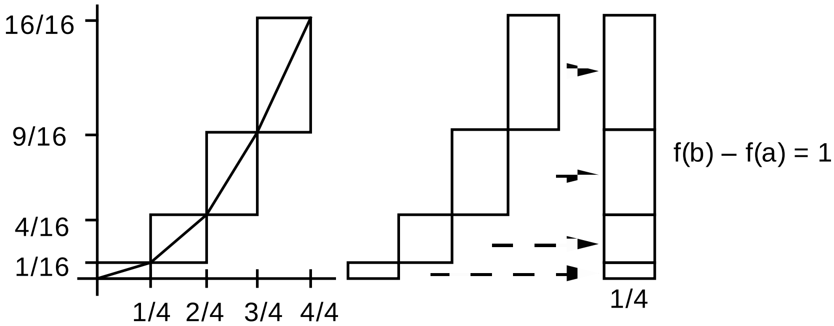
Se llama integral de una función continua en I = [a, b] al valor del área subyacente entre dicha función y el eje X.



Utilizamos en primer lugar una equi-partición de cuatro intervalos:

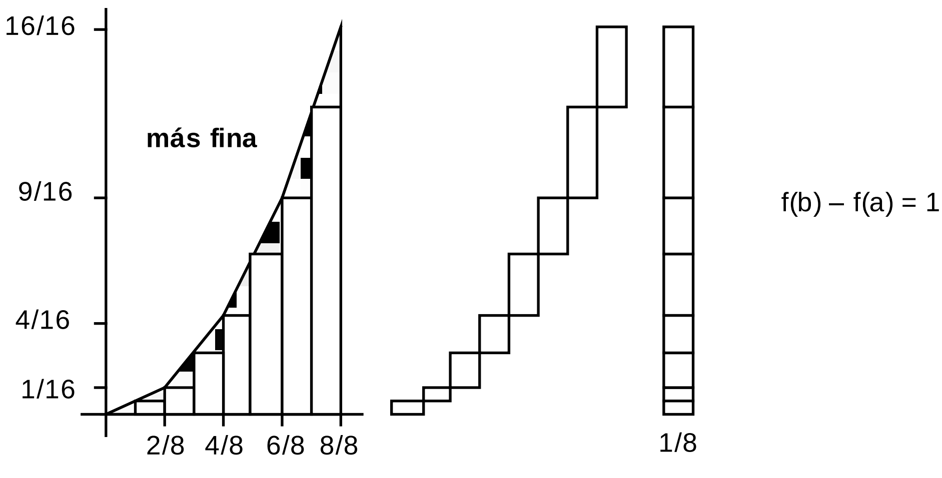


El máximo error cometido por cualquiera de las dos aproximaciones (defecto o exceso) será:



Es decir, $\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

Si voy afinando la partición; es decir, introduciendo nuevos puntos consigo irme acercando cada vez más al valor real:



En este caso el error máximo cometido en cualquiera de las aproximaciones (una por exceso y la otra por defecto) será:

$\frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$

Hemos mejorado la aproximación. Se ve que el proceso de aproximación es ilimitado con lo que el límite me dará el valor exacto de la integral.

En nuestro ejemplo si hiciésemos tender n –> ∞ ; es decir, el diámetro de la partición a cero, vemos que la diferencia entre las sumas inferiores y superiores tendería a cero:

$\frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} \to 0$

Es decir, cuando

$$\lim_{d(P_n)\to 0} S_n - s_n = 0 \quad entonces \quad \lim s_n = \lim S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Ha dicho valor se le representa así:

$$\int_a^b f(x)dx \; - \text{integral de } f(x) \text{ entre a y b}$$

Pues bien, para cualquier función continua se demuestra que este proceso es válido. Las sumas inferiores y superiores tienen por límite el área subyacente siempre que el diámetro de la partición tienda a cero.

Cualquier función que cumpla la condición anterior se dice que es INTEGRABLE; es decir, que el proceso anterior nos conduce a la evaluación del área subyacente.

Teorema fundamental del cálculo integral (Newton y Leibnitz)

y = f(x) función continua en I = [a, b] sea $S(x) = \int_a^x f(t)dt$, con x $\in$ [a, b]

entonces

S(x) es derivable y S'(x) = f(x)

que leeríamos integral entre "a" y "x". Me da la superficie entre dichos valores.

Se demuestra que S(x) es una primitiva de f(x); es decir, que:

S ' (x) = f(x)

Justificación del teorema

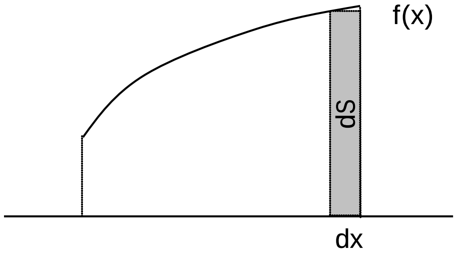
Se puede dar como ejemplo el típico de y = x en el intervalo [0,x]

Dicho de otra manera:

$$S(x) = \int f(x)dx = F(x) + k$$

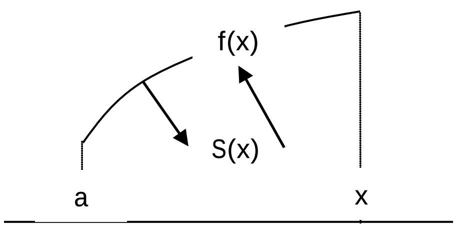
Podríamos decir, que la superficie es una primitiva del contorno. Y que el contorno es la derivada de la superficie.

Esta relación también se podría ilustrar con diferenciales:



Es decir, dS = f(x) · dx

También que el contorno es una derivada de la superficie.

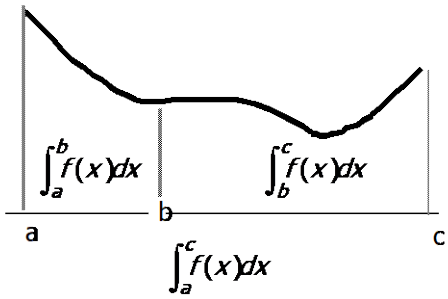


Propiedades de la integral

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$



Propiedades lineales

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Teorema del valor medio del cálculo integral

Sea y = f(x) función continua en I = [a, b], existe c $\in$ [a, b] tal que:

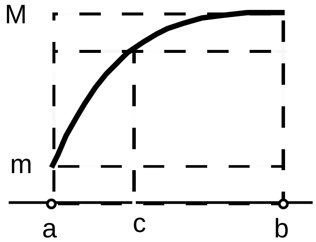
$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a) \qquad c \in [a, b]$$

DEM:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b - a) \quad \to \quad m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \leq M$$

Donde m y M son mínimo y máximo, respectivamente, de la función en el intervalo (que los alcanza por ser continua) según demuestra el teorema de Weierstrass.

Como es continua tomará todos los valores intermedios entre m y M y así se cumplirá el teorema.



Regla de Barrow

Para una función y = f(x) continua en el intervalo [a, b] si y = F(x) es una primitiva suya se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

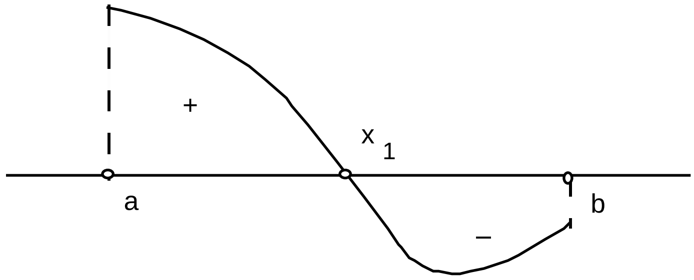
Aplicación de la integral al cálculo de áreas

El signo de un área

Al igual que se pueden orientar los segmentos y hablar de orientación positiva y negativa, y, por tanto, espacios positivo y negativo, la integral introduce un signo en lo que es en principio un cálculo de áreas.

El área: valor absoluto de la integral.

Veamos cómo utilizar la integral para hallar áreas en valor absoluto.



$$Area = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^b f(x)dx \right|$$

Sea pues una función y = f(x) integrable y definida en un intervalo I = [a, b] para hallar el área comprendida entre la función y el eje X procederemos de la siguiente manera:

Pasos a desarrollar:

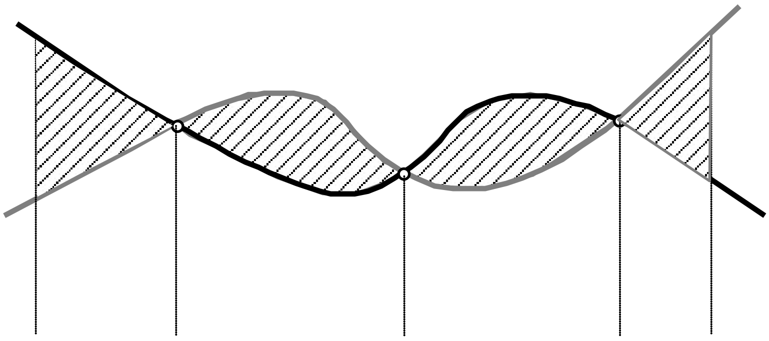
1. Averiguar los puntos de corte. Ver los que pertenecen al intervalo.
2. Ordenar los extremos de integración junto con las raíces.
3. Calcular la primitiva de f(x), F(x).
4. Calculamos F(a), F(x_1), F(x_2), F(x_3), ..., F(b)
5. Finalmente el área:

$$Area = \left| F(x_1) - F(a) \right| + \left| F(x_2) - F(x_1) \right| + \ldots \left| F(b) - F(x_{n-1}) \right|$$

Área comprendida entre dos funciones: f(x) y g(x) en un intervalo [a,b]

Supongamos ahora que tenemos dos funciones y = f(x), y = g(x) definidas en el intervalo I = [a, b]. Queremos hallar el área comprendida entre ambas funciones en dicho intervalo.

El problema se reduce a calcular los puntos de corte entre ambas funciones y después hallar la integral de la diferencia que podemos llamar h(x) = f(x) – g(x).



Obviamente el problema se reduce a lo siguiente, donde los valores x_1, x_2, x_3 ... son los puntos de corte de las dos funciones

$$Area = \left| \int_a^{x_1} h(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx \right| + \ldots \left| \int_{x_{n-1}}^{b} h(x)dx \right|$$

Es decir, se reduce al caso anterior, pero para la función diferencia. Por tanto, los pasos son similares.

PROBABILIDAD. BLOQUE 4

Experimento aleatorio. Sucesos

Experiencia aleatoria es aquella cuyo resultado NO es predecible según las condiciones establecidas o el control que tenemos de las variables que intervienen en el experimento. Por ejemplo, resultado al lanzar un dado al aire, una moneda, sortear un tema para examen, número de la lotería...

Suceso aleatorio

Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio en cuestión. Por ejemplo, "salir par"; "salir 3"; "salir menor que 4" ...

Los sucesos admiten una representación conjuntista. Lanzamiento de dado: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Suceso elemental

Cada uno de los resultados posibles que no admiten descomposición en otros más simples. Por ejemplo, salir 2. Son propiamente los que observamos al realizar la experiencia. Sucesos (no elementales) serían: salir par, salir un número primo,...

Espacio muestral

El conjunto de todos los sucesos elementales posibles. En el caso del dado: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Se representa con la letra E.

El suceso E recibe el nombre de suceso seguro, puesto que cualquier suceso está contenido en él. Es el universo en este caso. Aunque suene un poco absurdo sería que al lanzar un dado de 6 caras me salga un número del 1 al 6. Es claro que es seguro.

El suceso contrario, recibe el nombre de suceso imposible y se representa por ∅. Sería

imposible que cayera sobre un vértice.

Dos sucesos se dicen incompatibles si no se pueden dar a la vez. Es decir, es $A \cap B = \emptyset$. Son sucesos incompatibles salir par {2, 4, 6} y salir impar {1, 3, 5}

Frecuencia y probabilidad

Realizamos N veces una experiencia aleatoria. Recordemos las siguientes definiciones.

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso S o, simplemente, frecuencia de S, al *número de veces que ocurre* S. Se designa por $f(S)$.

Se llama **frecuencia relativa** de S a la *proporción de veces que ocurre* S.

$$fr(S) = \frac{f(S)}{N}$$

Probabilidad

Es la medida que asignamos a un suceso de su posibilidad; es decir, antes de realizar el experimento. Se establece de 0 a 1. Es decir, es una medida relativa. El 0 sería lo imposible y el 1 lo seguro. Vendría a ser como el 0% de los casos, lo imposible; 100% de los casos, el seguro.

Ley de los grandes números

$\lim_{n \to \infty} f(S) = P(S)$ –n es el nº de veces que realizamos el experimento–

La frecuencia de un suceso tiende a su probabilidad cuando el número de experimentos aumenta.

Axiomática de Kolmogorov

Propiedades básicas de las que se deducen todas las demás. Es el punto de partida de toda la teoría que se deducirá por razonamiento lógico.

a) $P(E) = 1$

b) $0 \leq P(A)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; si son incompatibles; es decir, no se pueden dar a la vez.

Regla de Laplace

Si $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $P[x_1] = P[x_2] = \ldots = P[x_n]$, entonces:

$$P[S] = \frac{\text{número de elementos de } S}{n} = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número de casos posibles}}$$

Se dice que un instrumento aleatorio es *de Laplace* cuando la probabilidad de todos sus sucesos elementales (casos) es la misma. Por ejemplo, un dado correcto, una moneda, una baraja…

En un espacio muestral finito en que todos los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso es el cociente que resulta de dividir los “casos favorables” a dicho suceso entre los “casos posibles” a dicho suceso.

$$P(S) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.

Probabilidad condicionada

Probabilidad de un suceso que está condicionado por otro.

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ y, lógicamente, $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Sucesos independientes

Son aquellos en que el resultado de uno no influye en el otro.
En este caso:
$P(A/B)=P(A)$

Claramente se deduce que: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Y viceversa.
En el fondo es decir que A tiene la misma proporción de casos en B que en el total.
Fácilmente se deduce que si de da un caso se da también el recíproco. Es decir,

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\cancel{P(A)}\cdot P(B)}{\cancel{P(A)}}=P(B)$$

Pruebas compuestas

Se trata de los experimentos que constan de la realización de dos o más experimentos que pueden ser consecutivos o a la vez. O bien, que el experimento se hace en varias etapas. Aquí hablaremos de probabilidad compuesta.

Serán independientes las pruebas si una no depende de la otra. En caso contrario serán dependientes.

$P(A_1,B_2)=P(A_1)\cdot P(B_2)$ Caso de independientes.

Esto se leería probabilidad de que ocurra A en el primer experimento y B en el segundo.

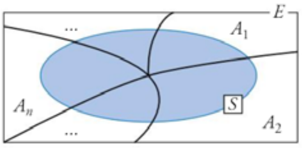
$P(A_1,B_2)=P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)$ Caso de dependientes.

$P(B_2/A_1)$. Se lee probabilidad de que salga B en la segunda condicionado a que salió A en la primera.

Probabilidad total

Se llama partición de E a un conjunto de ‘n’ sucesos independientes dos a dos y tales que la unión me da E. Luego, $E=\sum_{i=1}^{n}A_i$

Se deduce fácilmente la siguiente fórmula:



Tenemos n sucesos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Son incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.
Entonces, para cualquier suceso S se cumple que:

$$P[S] = P[A_1] \cdot P[S/A_1] + P[A_2] \cdot P[S/A_2] + \ldots + P[A_n] \cdot P[S/A_n]$$

A la probabilidad $P[S]$ descompuesta de este modo se la llama **probabilidad total.**

Demostración

Descomponemos S en sucesos incompatibles:

$$S = (A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S) \cup \ldots \cup (A_n \cap S)$$

Aplicamos la propiedad **T.5** de las probabilidades:

$$P[S] = P[A_1 \cap S] + P[A_2 \cap S] + \ldots + P[A_n \cap S]$$

Teniendo en cuenta que $P[A_k \cap S] = P[A_k] \cdot P[S/A_k]$, se obtiene la expresión buscada.

Es decir, $P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(S / A_i)$

Probabilidades 'a posteriori'. Fórmula de Bayes

Sabemos que: $P(A_i / S) = \dfrac{P(A_i \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(A_i) \cdot P(S / A_i)}{P(S)} = \dfrac{P(A_i) \cdot P(S / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(S / A_i)}$

Sería calcular la probabilidad de que haya ocurrido A_i condicionado a que sucedió B.

Distribuciones estadísticas y de probabilidad

Sea un $\left|\begin{array}{l}\text{experimento estadístico}\\ \text{experimento aleatorio}\end{array}\right|$ y una variable X $\left|\begin{array}{l}\text{estadística}\\ \text{aleatoria}\end{array}\right|$ asociada a dicho experimento. Es decir, una característica de dicho fenómeno.

Se llama distribución $\left|\begin{array}{l}\text{de frecuencias}\\ \text{de probabilidades}\end{array}\right|$ a la función que asocia a cada valor de la variable su $\left|\begin{array}{l}\text{frecuencia}\\ \text{probabilidad}\end{array}\right|$.

Media aritmética

La suma de todos los valores dividido entre el tamaño de la población.

Se representa por $\overline{x}$, y admite las siguientes expresiones dependiendo de cómo vengan dados los datos:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N}$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot n_n}{N} = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \cdots x_n \frac{n_n}{N} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots x_n \cdot f_n$$

Esperanza o media probabilística

A la media de una distribución de probabilidades se le llama esperanza matemática o valor esperado. Su cálculo es elemental:

$$E[X] = \mu = \overline{x} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots x_n \cdot p_n$$

Desviación respecto a la media

Es una medida de la desviación de cada dato de la población respecto de la media.

$$x_i - \overline{x}$$

Esta correspondería, como es lógico, a la desviación del valor x_i respecto de la media $\overline{x}$.

Varianza

La varianza es la media de las desviaciones al cuadrado. Es decir,

$$Var(X) = \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 \cdot p_1 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 \cdot p_2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2 \cdot p_n$$

De todas formas, se demuestra que equivale al siguiente valor de cálculo más sencillo:

La varianza coincide con la diferencia entre la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media.

$$Var(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Es decir,

$$Var(X) = x_1^{\,2} \cdot p_1 + x_2^{\,2} \cdot p_2 + \ldots + x_n^{\,2} \cdot p_n - \overline{x}^2$$

Desviación típica

Es la raíz cuadrada de la varianza. Se representa por la letra σ:

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.

Distribución binomial

Fue ideada por el francés Juan Bernouilli en 1713. Resulta de considerar experimentos aleatorios que sólo conozcan dos posibilidades. Por ejemplo: cara-cruz, curado-enfermo, defectuoso-correcto, par-impar,...etc.

En general, se suele llamar a uno de los dos éxito A y al otro fracaso A'.

Si el experimento se realiza una sola vez se llama de Bernouilli, si se repite varias veces y consideramos X: "número de éxitos" se dice binomial. A la probabilidad del éxito se la designa por p = P(a) y al número de experiencias por n. Estos dos números identifican a la distribución que se suele designar como:

X: B(n, p)

Se lee binomial de parámetros n y p.

Se puede considerar como: $X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ donde X_i: "resultado en la experiencia i-ésima".

Función de distribución

En general se tiene que:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

Es decir, la probabilidad de que el número de éxitos sea "k" viene dado por la expresión anterior.

MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DE LA BINOMIAL

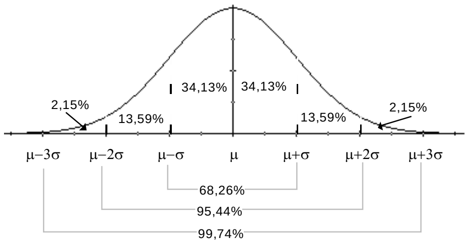
Distribución binomial: B(n,p)

$$X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$$
$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots E[X_n] = p + p + \cdots p = n \cdot p$$
$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n) = p \cdot q + p \cdot q + \cdots p \cdot q = n \cdot p \cdot q$$
$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Distribución normal

Algunos matemáticos observaron que multitud de fenómenos estadísticos tenían una distribución en forma de campana: distribución de estaturas, de pesos, de errores...

Todos se caracterizaban por una simetría, la acumulación en torno al valor central (el valor medio) y la disminución en los extremos.



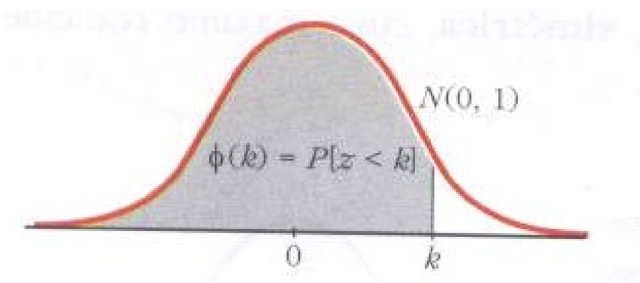
A esta distribución le pusieron el nombre de distribución normal y se caracteriza por los dos parámetros típicos: μ y σ. Se pone abreviadamente N(μ, σ)

La distribución normal es una distribución continua, por ello la probabilidad de un valor aislado es 0. Sólo tiene sentido la probabilidad de un intervalo.

Como es una distribución bastante complicada de calcular, la medida de su probabilidad hay que hacerla a través de ordenadores o bien consultando una tabla.

TABLAS DE LA Z: N(0,1)

A la distribución normal de media 0 y desviación típica 1 se le llama DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR porque sirve para cualquier otra distribución normal y la representaremos por la letra Z. Sus tablas de distribución de probabilidades son las siguientes:

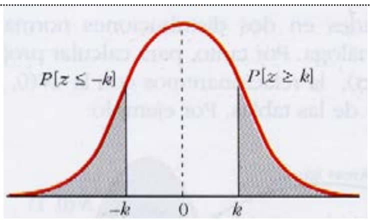


Lo que viene recogido en las tablas es la probabilidad acumulada hasta el valor “k” que se representa así: $F(k) = \phi(k) = P(Z \leq k) = P(Z < k)$.

Tablas de la distribución Z: N(0,1)

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,70	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

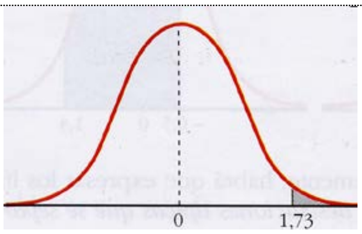
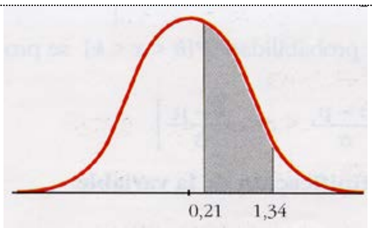
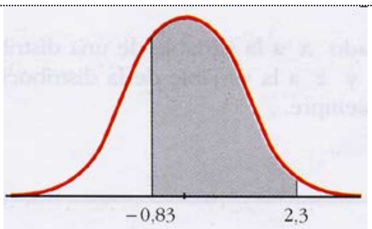
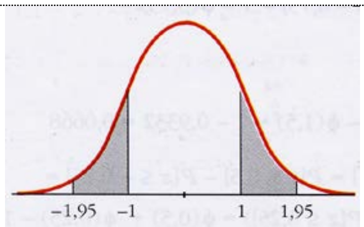
Manejo de tablas:



$$P(Z \le -k) = P(Z \ge k) = 1 - F(k)$$

$$P(Z \ge k) = 1 - P(Z < k)$$

Ejemplos:

	$P(z \geq 1,73) = 1 - P(z < 1,73) = 1 - F(1,73) = 1 - 0,9582 = 0,0418$
	$P(0,21 < z \leq 1,34) = F(1,34) - F(0,21) = 0,9099 - 0,5832 = 0,3267$
	$P(-0,83 < z \leq 2,3) = F(2,3) - F(-0,83) =$
	$P(-1,95 < z < -1) = P(1 < z < 1,95) =$

Tipificación de la variable

Cuando la distribución normal tiene parámetros diferentes a los anteriores, es decir, se trata de una X: N(μ, σ) para el cálculo de probabilidades tenemos que hacer lo que se llama una tipificación de la variable.

Se demuestra que la variable $\frac{x-\mu}{\sigma}$ es una N(0,1) con lo que lógicamente tendremos:

$$P\left[a < x < b\right] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.

La distribución binomial, bajo ciertas condiciones, a medida que aumenta el número de experimentos va tomando el aspecto de distribución normal:

Se demuestra que la distribución binomial B(n, p) se puede aproximar mediante una N(μ, σ) donde μ = n·p y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

- Si n·p, n·q > 3 el ajuste es bastante bueno
- Si n·p, n·q > 5 el ajuste es casi perfecto.